

Colle du 18/09 - Sujet 1
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1)n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

Exercice 2. Etudier la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{2e^x+1}{e^x+2}\right)$.

Colle du 18/09 - Sujet 2
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$.

Exercice 1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{\ln(|x|)}{x}}$.

Exercice 2. On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

Colle du 18/09 - Sujet 3
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists! (g, h) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

1. Calculer le domaine de définition de f .
2. Simplifier f sur son domaine de définition.
3. Faire l'étude de f .
4. Montrer que le graphe de f admet un axe de symétrie.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.